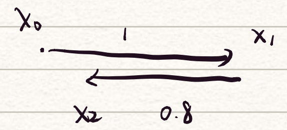
Graph-Based SLAM (Least square approach)

Approach for computing solution for overdetermined system

Minimizes the sum of the squared errors.

Problem Setting

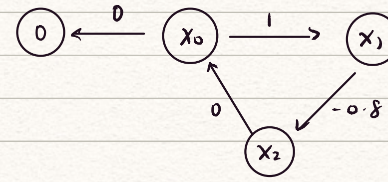


$x_0 = 0$

$x_1 = x_0 + 1$

$x_2 = x_1 - 0.8$

$x_2 = x_0$



最小二乘优化：(使用闭环)

方程

$$\begin{cases} f_1 = x_0 = 0 \\ f_2 = x_1 - x_0 - 1 = 0 \\ f_3 = x_2 - x_1 + 0.8 = 0 \\ f_4 = x_2 - x_0 = 0 \end{cases}$$

优化 →

$$c = \sum_{i=1}^{4} f_i^2 = x_0^2 + (x_1 - x_0 - 1)^2 + (x_2 - x_1 + 0.8)^2 + (x_2 - x_0)^2$$

求偏导

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial x_0} = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_0 - x_1 - x_2 = -1 \\ -x_0 + 2x_1 - x_2 = 1.8 \\ -x_0 - x_1 + 2x_2 = -0.8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0.93 \\ x_2 = 0.07 \end{cases}$$

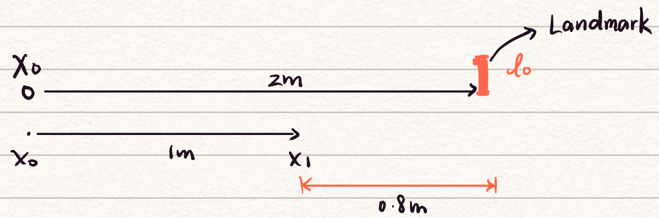
矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.8 \\ -0.8 \end{bmatrix}$$

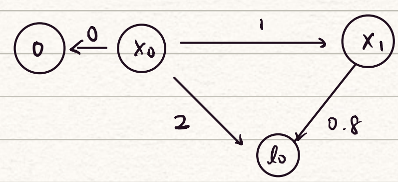
$$\Omega \quad \mu = \xi$$

$$\mu = \Omega^{-1} \xi$$

Problem with Landmark



初始为 x_0，前方 2m 有 1 个 landmark
编码器计录向前走了 1m，此时
landmark 在前方 0.8 m



方程
$$\begin{cases} x_0 = 0 & \text{initial} \\ x_1 = x_0 + 1 & \text{1 forward} \\ l_0 = x_0 + 2 & \text{first observation} \\ l_0 = x_1 + 0.8 & \text{second observation} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 = x_0 = 0 \\ f_2 = x_1 - x_0 - 1 \\ f_3 = l_0 - x_0 - 2 \\ f_4 = l_0 - x_1 - 0.8 \end{cases}$$

最小二乘残差：

这里的权重均为1（假设所有传感器一样准）

$$C = \sum_{i=1}^{4} f_i^2 = x_0^2 + (x_1 - x_0 - 1)^2 + (l_0 - x_0 - 2)^2 + (l_0 - x_1 - 0.8)^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial x_0} = 0 \Rightarrow 2x_0 - 2(x_1 - x_0 - 1) - 2(l_0 - x_0 - 2) = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 2(x_1 - x_0 - 1) - 2(l_0 - x_1 - 0.8) = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 2(l_0 - x_0 - 2) + 2(l_0 - x_1 - 0.8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1.01 \\ x_2 = 1.9 \end{cases}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0.2 \\ 2.8 \end{bmatrix}$$

$$\Omega \quad \mu = \xi$$

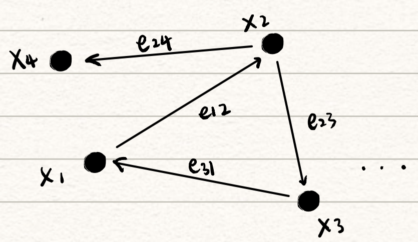
$$\mu = \Omega^{-1} \xi$$

权重也可不一样：权重为 edge 的信息矩阵 (information matrix)

图优化的后端：(Graph Optimization)

优化目标：$x^* = \underset{x}{\operatorname{argmin}} F(x)$

$$F(x) = \sum_{\langle i,j \rangle \in C} \underbrace{e(x_i, x_j, z_{ij})^T \Omega_{ij} e(x_i, x_j, z_{ij})}_{F_{ij}}$$



$x_1, x_2, \cdots x_n$ 为 n个 node

每个 node 是一个 2D or 3D 位姿

x_i：图顶点的参数向量

z_{ij}：测量值，perception

Ω_{ij}：该误差所占权重的矩阵

$e(x_i, x_j, z_{ij})$：x_i x_j 之间的关系与 z_{ij} 之间的吻合度

$$e(x_i, x_j, z_{ij}) \xrightarrow{def} e_{ij}(x_i, x_j) \xrightarrow{def} e_{ij}(x)$$

$$\therefore F(x) = e_{12}^T \Omega_{12} e_{12} + e_{23}^T \Omega_{23} e_{23} + e_{31}^T \Omega_{31} e_{31} + e_{24}^T \Omega_{24} e_{24} + \cdots$$

假设 sensor 采样呈多元高斯分布：

不同时刻的采样（互不相关）

$$f_X(x_1, x_2, \cdots x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} \left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right)$$

知识补充：协方差，协方差矩阵

协方差：衡量两个变量相关性，协方差 = { 正，正相关；0，独立；负，负相关 }

方差：$Var(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})}{n-1}$

协方差：$Cov(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1}$

这里X,Y为2个变量空间，也可认为是2个特征空间（X为x特征集合，Y为y特征集合）

e.g. 4个样本

$x_1 = (1,2)$ （x, y）

$x_2 = (3,6)$

$x_3 = (4,2)$

$x_4 = (5,2)$

$$\Rightarrow Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 4 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

协方差矩阵反映所有变量两两之间的关系

$$Cov(X,Y) = Cov(Z) = \begin{bmatrix} Cov(X,X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Cov(Y,Y) \end{bmatrix}$$

其中：$\bar{x} = 3.25 \quad \bar{y} = 3$

$$Cov(X,X) = \frac{1}{4-1}\left[(1-3.25)^2 + (3-3.25)^2 + (4-3.25)^2 + (5-3.25)^2\right] = 2.9167$$

$$Cov(X,Y) = Cov(Y,X) = \frac{1}{4-1} \times \left[(1-3.25)(2-3) + (3-3.25)(6-3) + \cdots\right] = -0.3333$$

$$Cov(Y,Y) = 4$$

$$\therefore \text{协方差矩阵 } Cov(Z) = \begin{bmatrix} 2.9167 & -0.3333 \\ -0.3333 & 4 \end{bmatrix} = \Sigma$$

总结得 $\Sigma_{ij} = \frac{(\text{样本矩阵第}i\text{列} - \text{第}i\text{列均值})^T(\text{样本矩阵第}j\text{列} - \text{第}j\text{列均值})}{\text{样本数}-1}$

知识补充：高斯分布 拓展到多维

一维高斯分布：$N(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$

高维高斯分布：$N(\vec{x}|\vec{\mu},\Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \cdot \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{u})^T\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{u})}$

$\vec{x}$ 为维度为D的向量

$\vec{u}$ 为向量的平均值

Σ 为所有向量$\vec{x}$的协方差矩阵

二维情况：

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，均值 $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$，方差 $\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ 假设 x_1, x_2 独立

$$f(\vec{x}) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x_1-\mu_1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x_2-\mu_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi^{\frac{2}{2}}\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

对于$\vec{x}$而言，协方差矩阵：$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$

$\det(\Sigma) = |\Sigma| = \sigma_1^2\sigma_2^2$

$$\therefore f(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi^{\frac{2}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{u})^T\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{u})\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}[x_1-u_1 \quad x_2-u_2] \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}[x_1-u_1 \quad x_2-u_2] \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\begin{bmatrix} \sigma_2^2(x_1-\mu_1) \\ \sigma_1^2(x_2-\mu_2) \end{bmatrix}\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right]$$

SLAM 中的优化目标：已知观测 z 后计算 x 的条件概率分布

$$P(x|z) = \frac{P(z|x)\,P(x)}{P(z)} \propto P(z|x)\,P(x)$$

↓ 似然　↓ 先验

最大后验

$$x^*_{MAP} = \arg\max P(x|z) = \arg\max P(z|x)P(x)$$

↓ 最大似然

$$x^*_{MLE} = \arg\max P(z|x)$$ "目前位姿下可能产生什么样的观测"

$$x \sim N(\mu, \Sigma)$$ ← 正态噪音的 Covariance Matrix

回到 $$f_x(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right)$$

取对数 $$l_{ij} \propto [z_{ij} - \hat{z}_{ij}(x_i, x_j)]^T \Omega_{ij} [z_{ij} - \hat{z}_{ij}(x_i, x_j)]$$

其中 $z_{ij} - \hat{z}_{ij}(x_i, x_j)$ 记为 e_{ij}

note: $\Omega_{ij} = \Sigma^{-1}$ （测量值 $x_1, x_2, \cdots x_k$ 的协方差越小，信息矩阵权值越大）

问题转化为求解非线性最小二乘
- Gauss - Newton
- Levenberg - Marquardt

在初始值 $\check{x}$ 附近开始迭代求最优解

$$e_{ij}(\check{x}_i + \Delta x_i, \check{x}_j + \Delta x_j) = e_{ij}(\check{x} + \Delta x)$$

$$\approx e_{ij} + J_{ij}\Delta x$$

J_{ij}: 误差函数 $e_{ij}(x)$ 在 $\check{x}$ 附近的 Jacobian Matrix

$e_{ij}(\check{x})$ 简写为 e_{ij}

仅与 x_i, x_j 有关

∴ 最小二乘其中一项：

$$F_{ij}(\check{x} + \Delta x) = e_{ij}(\check{x} + \Delta x)^T \Omega_{ij}\, e_{ij}(\check{x} + \Delta x)$$

$$\approx (e_{ij} + J_{ij}\Delta x)^T \Omega_{ij} (e_{ij} + J_{ij}\Delta x)$$

$$= (e_{ij}^T + \Delta x^T J_{ij}^T)\Omega_{ij}(e_{ij} + J_{ij}\Delta x)$$

$$= e_{ij}^T \Omega_{ij} e_{ij} + e_{ij}^T \Omega_{ij} J_{ij} \Delta x + (J_{ij} \Delta x)^T \Omega_{ij} e_{ij} + J_{ij}^T \Delta x^T \Omega_{ij} J_{ij} \Delta X$$

均为 n×1 矩阵 $A^T B = B^T A$

$$= \underbrace{e_{ij}^T \Omega_{ij} e_{ij}}_{C_{ij}} + 2 \underbrace{e_{ij}^T \Omega_{ij} J_{ij}}_{b_{ij}^T} \Delta x + \Delta x^T \underbrace{J_{ij}^T \Omega_{ij} J_{ij}}_{H_{ij}} \Delta x$$

$$= C_{ij} + 2 b_{ij}^T \Delta x + \Delta x^T H_{ij} \Delta x$$

b_{ij} 为列向量
Δx 为列向量
e_{ij} 为列向量
C_{ij} 为一个数值

误差平方和：

$$F(\check{x} + \Delta x) = \sum_{\langle i,j \rangle \in C} F_{ij}(\check{x} + \Delta x)$$

$$\approx \sum_{\langle i,j \rangle \in C} C_{ij} + 2 b_{ij}^T \Delta x + \Delta x^T H_{ij} \Delta x$$

$$= C + 2 b^T \Delta X + \Delta X^T H \Delta X$$

$$C = \sum C_{ij}$$

$$b = \sum b_{ij}$$

$$H = \sum H_{ij}$$

对 $F(\check{x} + \Delta x)$ 两边求导：

$$0 = 2b + 2H \Delta x$$

$\therefore$ $H \Delta x^* = -b$ （G-N 法）　　H 为系统的信息矩阵

不断迭代（Euclidean Space 欧式空间中）

$$x^* = \check{x} + \Delta x^*$$

非欧空间

$$x_i^* = \check{x}_i \boxplus \Delta x_i^*$$

$$= \begin{bmatrix} x + \Delta x \cos\theta - \Delta y \sin\theta \\ y + \Delta x \sin\theta + \Delta y \cos\theta \\ \text{normAngle}(\theta + \Delta\theta) \end{bmatrix}$$

∵误差函数 e_{ij} 仅与 x_i, x_j 有关 ∴ J_{ij} 中仅与 x_i, x_j 有关项不为 0

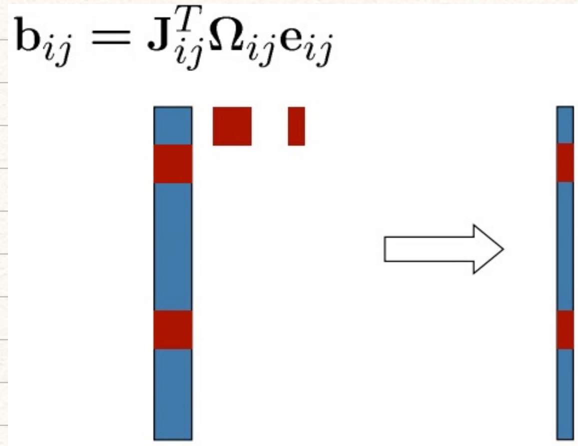
$$J_{ij} = \Big[\, 0 \cdots 0,\ \underbrace{\frac{\partial e_{ij}(x_i)}{\partial x_i}}_{A_{ij}},\ 0 \cdots\cdots 0,\ \underbrace{\frac{\partial e_{ij}(x_j)}{\partial x_j}}_{B_{ij}},\ 0 \cdots 0 \,\Big]$$

$$b_{ij}^T = e_{ij}^T \Omega_{ij} J_{ij}$$

$$= e_{ij}^T \Omega_{ij} [0 \cdots A_{ij} \cdots 0 \cdots B_{ij} \cdots 0]$$

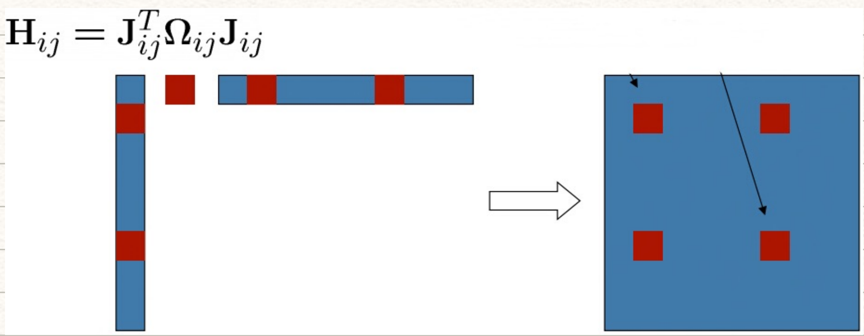
$$= [0 \cdots e_{ij}^T \Omega_{ij} A_{ij} \cdots 0 \cdots e_{ij}^T \Omega_{ij} B_{ij} \cdots 0]$$

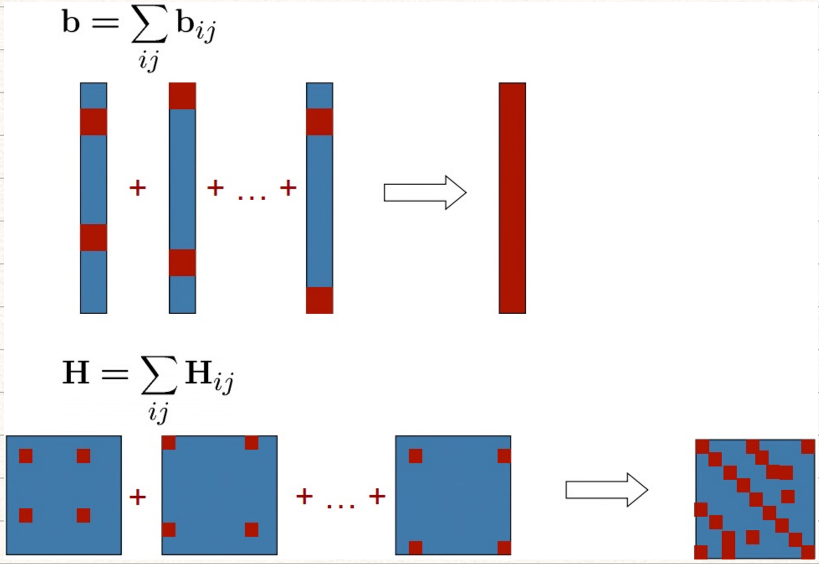
↳ $$b_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ A_{ij}^T \Omega_{ij} e_{ij} \\ \vdots \\ B_{ij}^T \Omega_{ij} e_{ij} \\ \vdots \end{bmatrix}$$



$$H_{ij} = J_{ij}^T \Omega_{ij} J_{ij}$$

$$= \begin{bmatrix} \vdots \\ A_{ij}^T \\ \vdots \\ B_{ij}^T \\ \vdots \end{bmatrix} \Omega_{ij} [\cdots A_{ij} \cdots B_{ij} \cdots]$$





Algorithm 1 Computes the mean $\mathbf{x}^*$ and the information matrix $\mathbf{H}*$ of the multivariate Gaussian approximation of the robot pose posterior from a graph of constraints.

Require: $\breve{\mathbf{x}} = \breve{\mathbf{x}}_{1:T}$: initial guess. $\mathcal{C} = \{\langle \mathbf{e}_{ij}(\cdot), \boldsymbol{\Omega}_{ij} \rangle\}$: constraints

Ensure: $\mathbf{x}^*$: new solution, $\mathbf{H}^*$ new information matrix

// find the maximum likelihood solution

while $\neg$converged **do**

$\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{0} \qquad \mathbf{H} \leftarrow \mathbf{0}$

for all $\langle \mathbf{e}_{ij}, \boldsymbol{\Omega}_{ij} \rangle \in \mathcal{C}$ **do**

// Compute the Jacobians $\mathbf{A}_{ij}$ and $\mathbf{B}_{ij}$ of the error function

$\mathbf{A}_{ij} \leftarrow \left.\frac{\partial \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i}\right|_{\mathbf{x}=\breve{\mathbf{x}}} \qquad \mathbf{B}_{ij} \leftarrow \left.\frac{\partial \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_j}\right|_{\mathbf{x}=\breve{\mathbf{x}}}$

// compute the contribution of this constraint to the linear system

$\mathbf{H}_{[ii]} \mathrel{+}= \mathbf{A}_{ij}^T \boldsymbol{\Omega}_{ij} \mathbf{A}_{ij} \qquad \mathbf{H}_{[ij]} \mathrel{+}= \mathbf{A}_{ij}^T \boldsymbol{\Omega}_{ij} \mathbf{B}_{ij}$

$\mathbf{H}_{[ji]} \mathrel{+}= \mathbf{B}_{ij}^T \boldsymbol{\Omega}_{ij} \mathbf{A}_{ij} \qquad \mathbf{H}_{[jj]} \mathrel{+}= \mathbf{B}_{ij}^T \boldsymbol{\Omega}_{ij} \mathbf{B}_{ij}$

// compute the coefficient vector

$\mathbf{b}_{[i]} \mathrel{+}= \mathbf{A}_{ij}^T \boldsymbol{\Omega}_{ij} \mathbf{e}_{ij} \qquad \mathbf{b}_{[j]} \mathrel{+}= \mathbf{B}_{ij}^T \boldsymbol{\Omega}_{ij} \mathbf{e}_{ij}$

end for

// keep the first node fixed

$\mathbf{H}_{[11]} \mathrel{+}= \mathbf{I}$

// solve the linear system using sparse Cholesky factorization

$\Delta\mathbf{x} \leftarrow \text{solve}(\mathbf{H}\,\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{b})$

// update the parameters

$\breve{\mathbf{x}} \mathrel{+}= \Delta\mathbf{x}$

end while

$\mathbf{x}^* \leftarrow \breve{\mathbf{x}}$

$\mathbf{H}^* \leftarrow \mathbf{H}$

// release the first node

$\mathbf{H}^*_{[11]} \mathrel{-}= \mathbf{I}$

return $\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{H}^* \rangle$

构建误差函数:

$$e_{ij}(x_i, x_j) = t2v(Z_{ij}^{-1}(x_i^{-1} \cdot x_j))$$

Z_{ij}^{-1}: x_i observed from x_j (virtual observation)

x_j in the reference of x_i (graph) $\hat{Z}_{ij}$

如果 $Z_{ij} = x_i^{-1} x_j$ 则 error 为0，从图上看 以及实际观察一样

设 $\hat{z}_{ij}$ (j到i的变换矩阵为: $x_i^{-1} x_j = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

设 $Z_{ij} = \begin{bmatrix} R' & t' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (measurement)

误差计算:

$$Z_{ij}^{-1}(x_i^{-1} x_j) = \begin{bmatrix} R' & t' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'^T & -R'^T t' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R'^T R & R'^T t - R'^T t' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R'^T R & R'^T (t - t') \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

知识补充

分块矩阵求导

$$\begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \left[\begin{bmatrix} I & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]^{-1} = \left[\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} R^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_{ij}^{-1}(X_i^{-1}X_j) = \begin{bmatrix} R'^T R & R'^T(t-t') \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将 $X_i^{-1}X_j$ 化为 $\begin{bmatrix} R_i^T(t_j - t_i) \\ \theta_j - \theta_i \end{bmatrix}$

转为误差向量：

$$\Delta t_{ij} = R_z^T\left[R_i^T\left(\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} x_z \\ y_z \end{bmatrix}\right]$$

$$\frac{\partial e_{ij}(x_i)}{\partial x_i} = A_{ij} = \begin{bmatrix} \boxed{-R_z^T R_i^T}_{2\times 2} & \boxed{R_z^T \frac{\partial R_i^T}{\partial \theta_i}(t_j - t_i)}_{1\times 2} \\ 0 \quad 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial e_{ij}(x_j)}{\partial x_j} = B_{ij} = \begin{bmatrix} R_z^T R_i^T & 0 \\ 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$